

• Derivada de suma y resta de funciones.

Ejemplo 1: Sea $f(x) = 5x^6 - 4x^2 - 1 + \frac{1}{x^3}$ - Derivamos término a término:
y reescribimos el último término $f'(x) = 5 \cdot 6x^{6-1} - 4 \cdot 2x^{2-1} + x^{-3}$ - Calculando y derivando x^{-3} : $f'(x) = 30x^5 - 8x + (-3)x^{-3-1}$

$$f'(x) = 30x^5 - 8x - 3x^{-4}$$

- Reescribiendo el último término: $f'(x) = 30x^5 - 8x - \frac{3}{x^4}$

• Derivada de producto de funciones.

Ejemplo 2: $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot \ln x$ - Primero reescribamos $\sqrt{x+1}$ como potencia para luego derivarla como función potencial

$$f(x) = (x+1)^{1/2} \cdot \ln x$$

- Aplicando la regla de derivación
de un producto

$$f'(x) = [(x+1)^{1/2}]' \cdot \ln x + (x+1)^{1/2} \cdot (\ln x)'$$

- Derivando

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \ln x + (x+1)^{1/2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} \cdot \ln x + \frac{(x+1)^{1/2}}{x}$$

- Reescribiendo la potencia
negativa

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)^{1/2}} \cdot \ln x + \frac{(x+1)^{1/2}}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\ln x}{2\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x+1}}{x}$$

• Derivada de un cociente de funciones

Ejemplo 3: $f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$ - Aplicando la regla de derivación: $f'(x) = \frac{(e^x)' \cdot \cos x - e^x \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2}$

- Derivando

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot \cos x - e^x (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot \cos x + e^x \sin x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{e^x (\cos x + \sin x)}{\cos^2 x}$$

- Derivada de una composición de funciones

Ejemplo 4: $f(x) = \sin(\operatorname{tg}(x^2 + \sqrt{3}))$

Una función compuesta se deriva utilizando la regla de la cadena desde afuera hacia adentro. y de a una función por vez.

- Aplicando la regla: $f'(x) = \underbrace{\cos(\operatorname{tg}(x^2 + \sqrt{3}))}_{\text{derivada del seno}} \cdot \underbrace{\sec^2(x^2 + \sqrt{3})}_{\text{derivada de la tangente}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{derivada de } x^2 + \sqrt{3}}$

- Sabiendo que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$: $f'(x) = \cos(\operatorname{tg}(x^2 + \sqrt{3})) \cdot \frac{1}{\cos^2(x^2 + \sqrt{3})} \cdot 2x$

- Reacomodando $f'(x) = \frac{2x \cdot \cos(\operatorname{tg}(x^2 + \sqrt{3}))}{\cos^2(x^2 + \sqrt{3})}$

EJERCICIO 1: Calcular por definición la derivada de $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$.

Definición de derivada de $f(x)$: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Como $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ entonces $f(x+h) = 3(x+h)^2 - 5(x+h) + 2$.

Luego, en la definición:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{3(x+h)^2 - 5(x+h) + 2}^{f(x+h)} - \underbrace{(3x^2 - 5x + 2)}_{f(x)}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x^2 + 2xh + h^2) - 5x - 5h + 2 - 3x^2 + 5x - 2}{h}$$

- cancelando

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5h - 3x^2}{h}$$

- sacando factor común;

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6x + 3h - 5)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h - 5)$$

-reemplazando $h=0$:

$$f'(x) = 6x - 5$$

EJERCICIO 2: Calcular por definición la derivada de $f(x) = \cos x$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}; \text{ como } \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \text{ reemplazamos}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h}; \text{ utilizando propiedades de límites}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \overset{+1}{\cos h} - \sin x \cdot \overset{+1}{\sin h} - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin h}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x}{h} - \sin x - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x}{h} = -\sin x$$

EJERCICIO 3: Hallar la derivada de las

EJERCICIO 3i: Hallar las siguientes derivadas con sumas y restas.

a. $f(x) = \sqrt{x} + x^9 - 2 \cdot x^3$; como $\sqrt{x} = x^{1/2}$ es más sencillo derivar $x^{1/2}$ que la $\sqrt{\quad}$

$$= x^{1/2} + x^9 - 2 \cdot x^3$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{1/2-1} + 9 \cdot x^{9-1} - 3 \cdot 2 x^{3-1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} + 9 \cdot x^8 - 6 \cdot x^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x^{1/2}} + 9 \cdot x^8 - 6 \cdot x^2$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 9 \cdot x^8 - 6 \cdot x^2$$

$$b. f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}$$

Para derivar el segundo y tercer término no lo haremos a través de la regla derivada de cociente de funciones sino que utilizaremos x^{-1} para el segundo término y $-3 \cdot x^{-2}$ para el tercer término y así derivaremos una función potencial lo cual es menos complicado.

$$f(x) = \ln x + x^{-1} - 3 \cdot x^{-2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} + (-1)x^{-1-1} - (-2) \cdot 3 \cdot x^{-2-1} \\ &= \frac{1}{x} - x^{-2} + 6 \cdot x^{-3} \end{aligned}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3}$$

EJERCICIO 4: Hallar las siguientes derivadas con productos y divisiones.

$$a. f(x) = x^2 \cdot \sin x$$

$$f'(x) = (x^2)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)'$$

$$f'(x) = 2x \cdot \sin x + x^2 (\cos x)$$

$$\therefore f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

$$b. f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$f'(x) = (x-1)'(x-2)(x-3) + (x-1)(x-2)'(x-3) + (x-1)(x-2)(x-3)'$$

$$f'(x) = (1 \cdot x^{1-1} - 0)(x^2 - 2x - 3x + 6) + (x-1)(1 \cdot x^{1-1} - 0)(x-3) + (x^2 - x - 2x + 2)(1 \cdot x^{1-1} - 0)$$

$$f'(x) = 1 \cdot x^0 (x^2 - 5x + 6) + (x^2 - 4x + 3)(1 \cdot x^0) + (x^2 - 3x + 2)(1 \cdot x^0)$$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$$

$$c. f(x) = (x^2 + 1) \cdot \sqrt{x} + \cos x$$

$$f'(x) = (x^2 + 1)' \cdot x^{1/2} + (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{2} x^{1/2-1} - (\cos x)'$$

$$f'(x) = 2 \cdot x^{2-1} \cdot x^{1/2} + (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} - (-\sin x)$$

$$f'(x) = 2 \cdot x \cdot x^{1/2} + \frac{x^2 + 1}{2 x^{1/2}} + \sin x$$

$$f'(x) = 2 \cdot x^{3/2} + \frac{x^2 + 1}{2 \sqrt{x}} + \sin x$$

$$\therefore f'(x) = 2 \cdot \sqrt{x^3} + \frac{x^2 + 1}{2 \sqrt{x}} + \sin x$$

$$d. f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x)' \cdot \ln x - e^x (\ln x)'}{(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot \ln x - e^x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot \ln x}{(\ln x)^2} - \frac{e^x}{x(\ln x)^2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{e^x}{\ln x} \left(1 - \frac{1}{x \cdot \ln x} \right)$$

$$e. f(x) = \frac{e^x + \sin x}{x \cdot e^x}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x + \sin x)' \cdot x \cdot e^x - (e^x + \sin x)(x \cdot e^x)'}{(x \cdot e^x)^2}, \text{ sabiendo que: } (e^x + \sin x)' = e^x + \cos x$$

reemplazando:

$$\text{y que: } (x \cdot e^x)' = e^x + x \cdot e^x$$

$$f'(x) = \frac{(e^x + \cos x) x \cdot e^x - (e^x + \sin x)(e^x + x \cdot e^x)}{x^2 \cdot (e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x \cdot e^x (e^x + \cos x) - e^x (1+x)(e^x + \sin x)}{x^2 \cdot (e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x \cdot e^x + x \cos x - e^x - \sin x - x e^x - x \sin x}{x^2 \cdot e^x}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{x \cdot \cos x - e^x - \sin x - x \cdot \sin x}{x^2 \cdot e^x}$$

EJERCICIO 4: Encontrar las derivadas de las siguientes funciones compuestas utilizando la regla de la cadena.

$$a. f(x) = 4(x^3 - x^2 + 1)^2 - 6(x^2 + 1)^3$$

$$f'(x) = \underbrace{2 \cdot 4(x^3 - x^2 + 1)^{2-1}}_{\text{la derivada del cuadrado}} \cdot \underbrace{(3x^2 - 2x)}_{\text{la derivada de } x^3 - x^2 + 1} - \underbrace{3 \cdot 6(x^2 + 1)^{3-1}}_{\text{la derivada del cubo}} \cdot \underbrace{(2x)}_{\text{la derivada de } x^2 + 1}$$

$$f'(x) = (8x^3 - 8x^2 + 8) \cdot (3x^2 - 2x) - 18(x^2 + 1)^2 \cdot (2x)$$

$$f'(x) = 24x^5 - 16x^4 - 24x^4 + 16x^3 + 24x^2 - 16x - 36x(x^4 + 2x^2 + 1)$$

$$\therefore f'(x) = -12x^5 - 40x^4 + 88x^3 + 24x^2 + 20x$$

Para tener en cuenta: en las funciones compuestas comenzamos por derivar a la función más abarcadora, luego, la siguiente más abarcadora y así sucesivamente pero siempre de a una función por vez (Regla de la cadena)

b. $f(x) = \cos(x + a \cdot x^2 + b)$

$$f'(x) = \underbrace{-\sin(x + ax^2 + b)}_{\text{derivada del coseno}} \cdot \underbrace{(1 + a \cdot 2x + 0)}_{\substack{\text{derivada de } x^2 \\ \text{derivada de la } x}} \xrightarrow{\text{derivada de } b.}$$

$$\therefore f'(x) = -\sin(x + ax^2 + b) \cdot (1 + 2ax)$$

c. $f(x) = (\ln \operatorname{tg} \sqrt{x^4 - 16})^5$

Reescribiremos $\sqrt{x^4 - 16}$ como $(x^4 - 16)^{1/2}$ pues, además de ser más sencillo para derivar, no tendremos que recordar tantas reglas de derivación.

$$f(x) = (\ln \operatorname{tg} (x^4 - 16)^{1/2})^5$$

$$f'(x) = \underbrace{5(\ln \operatorname{tg} (x^4 - 16)^{1/2})^4}_{\text{derivada de la fn potencial}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\operatorname{tg} (x^4 - 16)^{1/2}}}_{\text{derivada del logaritmo natural}} \cdot \underbrace{\sec^2 (x^4 - 16)^{1/2}}_{\text{derivada de la tangente}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} (x^4 - 16)^{-1/2}}_{\text{derivada de la } (x^4 - 16)^{1/2}} \cdot \underbrace{(4x^3 + 0)}_{\substack{\text{derivada de } -16 \\ \text{derivada de } x^4}}$$

$$f'(x) = \frac{5(\ln \operatorname{tg} \sqrt{x^4 - 16})^4}{\frac{\sin \sqrt{x^4 - 16}}{\cos \sqrt{x^4 - 16}}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x^4 - 16}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^4 - 16}} \cdot 2x^3$$

$$\therefore f'(x) = \frac{10 \cdot x^3 \cdot (\ln \operatorname{tg} \sqrt{x^4 - 16})^4}{\sqrt{x^4 - 16} \cdot \sin \sqrt{x^4 - 16} \cdot \cos \sqrt{x^4 - 16}}$$

d. $f(x) = \sin[(x^2 - 1) \cdot (1 + x)^2]$

La función $f(x)$ es compuesta pero además entre los corchetes tenemos un producto de funciones.

$$f'(x) = \underbrace{\cos[(x^2 - 1) \cdot (1 + x)^2]}_{\text{derivada del coseno}} \cdot \underbrace{[(x^2 - 1)' \cdot (1 + x)^2 + (x^2 - 1) \cdot ((1 + x)^2)']}_{\substack{\text{derivada de } [(x^2 - 1) \cdot (1 + x)^2], \\ \text{como es un producto utilizamos} \\ \text{la fórmula de derivada de un} \\ \text{producto de funciones}}}$$

$$f'(x) = \cos[(x^2 - 1) \cdot (1 + x)^2] \cdot [2x \cdot (1 + x)^2 + (x^2 - 1) \cdot 2(1 + x) \cdot (0 + 1)]$$

$$f'(x) = \cos[(x^2 - 1) \cdot (1 + x)^2] \cdot [2x \cdot (1 + 2x + x^2) + (x^2 - 1) \cdot (2 + 2x)]$$

$$f'(x) = \cos[(x^2 - 1) \cdot (1 + x)^2] \cdot (2x + 4x^2 + 2x^3 + 2x^2 + 2x^3 - 2 - 2x)$$

$$\therefore f'(x) = 2(2x^3 + 3x^2 - 1) \cdot \cos[(x^2 - 1) \cdot (1 + x)^2]$$