

Nros Complejos

Se crean a partir de la necesidad de resolver el sig.

Problema:

$$x = \sqrt{-4}$$

veremos que no hay ningún nro

que elevado al cuadrado de como resultado (-4).

Entonces los matemáticos de la época hicieron:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2 \cdot \underbrace{\sqrt{-1}}_i$$

entonces: $\sqrt{-4} = \underbrace{2i}$

Nro Imaginario

Aquí a parecen entonces los nros Complejos, que están formados de la sig. forma

$$Z = \underbrace{\text{nro real}}_{\text{parte real}} + \underbrace{\text{nro real} \cdot i}_{\text{parte imaginaria}}$$

Ejemplos: $z_1 = (5 + 3i)$

$z_3 = (-3 - 8i)$

$z_2 = (-2 + 4i)$

$z_4 = (0 - 5i)$

Se llama "Conjugado de un nro complejo" a otro nro complejo que tiene la misma parte real y la parte imaginaria cambiada de signo.

Ejemplos:

$z_1 = (3 + 2i)$ su conjugado es $(3 - 2i)$

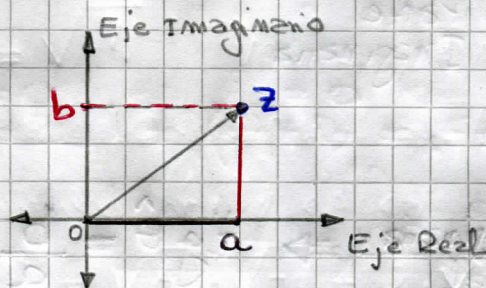
$z_2 = (-2 + 3i)$ " " " $(-2 - 3i)$

$z_3 = (0 + 4i)$ " " " $(0 - 4i)$

$z_4 = (-3 - 5i)$ " " " $(-3 + 5i)$

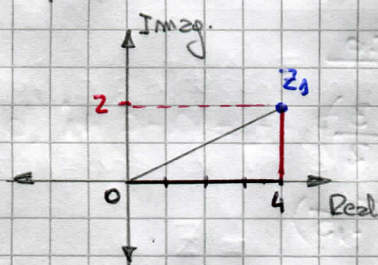
Representación gráfica de un nro complejo

$$Z = a + bi$$

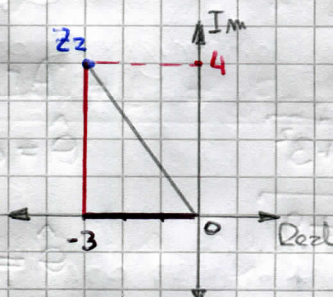


En el eje de las ordenadas se representa la parte Imaginaria y en el eje de las abscisas la parte Real.

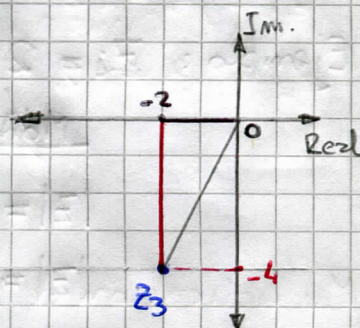
Ejemplos:



$$Z_1 = (4 + 2i)$$



$$Z_2 = (-3 + 4i)$$



$$Z_3 = (-2 - 4i)$$

Un nro complejo se puede escribir de diferentes maneras.

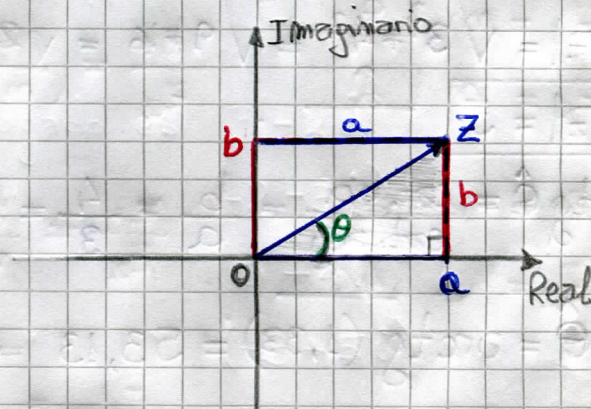
- * Forma binómica $\rightarrow Z = (a + bi)$
- * Forma polar $\rightarrow Z = |Z| \angle \theta$
- * Forma trigonométrica $\rightarrow Z = |Z| (\cos \theta + i \sin \theta)$

Forma binómica:

$$Z = a + bi$$

Parte
Real

Parte
Imaginaria



Módulo de Z: $|Z|$ es la hipotenusa del Δ rectángulo OAZ

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

↑ ↑
Parte Real Parte Imaginaria

$$\operatorname{tg} \hat{\theta} = \frac{\text{Parte Imaginaria}}{\text{Parte Real}} \Rightarrow \operatorname{tg} \hat{\theta} = \frac{b}{a}$$

$$\hat{\theta} = \arctg\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \text{Argumento}$$

Ejemplo: $Z_1 = 2 + 3i$

Módulo

$$|Z| = \sqrt{2^2 + 3^2}$$

$$|Z| = \sqrt{4 + 9}$$

$$|Z| = 3,6$$

Argumento

$$\hat{\theta} = \arctg\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\hat{\theta} = \arctg(1,5)$$

$$\hat{\theta} = 56,3$$

Forma Polar:

$$Z_1 = \underbrace{|Z|}_{\text{Módulo}} \underbrace{\angle \theta}_{\text{Argumento}}$$

$Z = 3 + 4i$ ← forma binómica

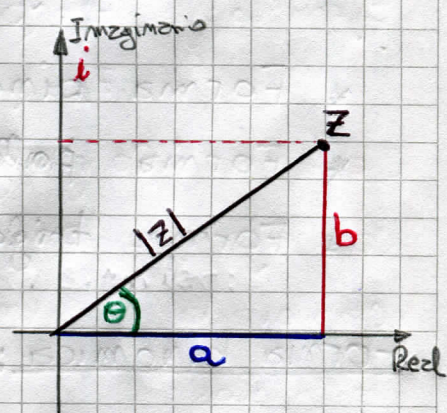
$$|Z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$$

$$|Z| = 5$$

$$\operatorname{tg} \hat{\theta} = \frac{\text{cat. op.}}{\text{cat. ady.}} = \frac{b}{a} = \frac{4}{3} = 1,33 \Rightarrow \operatorname{tg} \hat{\theta} = 1,33$$

$$\hat{\theta} = \arctg(1,33) = 53,13 \Rightarrow \hat{\theta} = 53,13$$

$$Z = 5 \angle 53,13$$

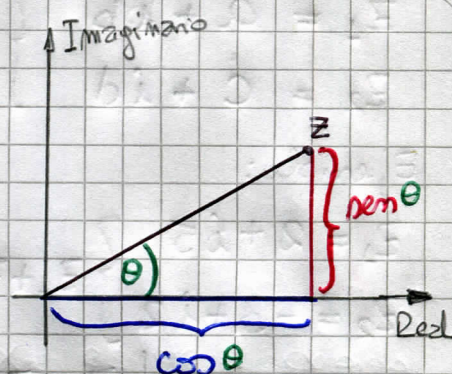


Forma trigonométrica

$$Z = |Z| \cdot (\underbrace{\cos \theta}_{\text{Parte Real}} + i \underbrace{\sin \theta}_{\text{Parte Imaginaria}})$$

Parte Real

Parte Imaginaria



Ejemplo:

$$Z = 5 \cdot (\cos 53,13 + i \sin 53,13)$$

Para averiguar el valor del ángulo θ utilizamos siempre valores + (positivos) y luego según el cuadrante donde se encuentre el N° complejo según el sig. gráfico:

Ejemplo: Convertir el número

 $Z_1 = -3 + i4$ en su forma polar

$$|Z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25}$$

$$|Z| = 5$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\alpha = \arctg(1,33) \Rightarrow \alpha = 53,13$$

Como el punto $Z_1 = -3 + i4$ está ubicadoen el 2º cuadrante entonces $\theta = 180 - \alpha$

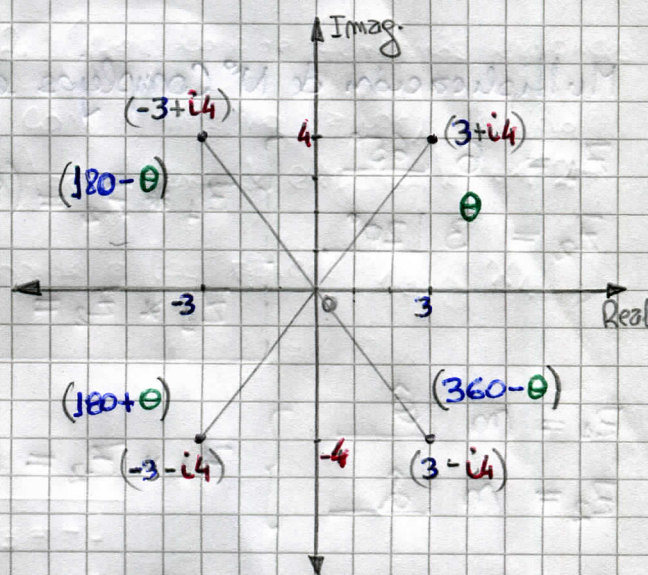
$$\theta = 180^\circ - 53,13$$

$$\theta = 126,87$$

Entonces

$$Z_1 = 5 \angle 126,87$$

Forma polar



Suma de N° Complejos en forma binómica:

$$\left. \begin{array}{l} Z_1 = a + ib \\ Z_2 = c + id \end{array} \right\} Z_1 + Z_2 = (a+c) + i(b+d)$$

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} Z_1 = 2 + i5 \\ Z_2 = -3 + i2 \end{array} \right\} Z_1 + Z_2 = (2+(-3)) + i(5+2)$$
$$\boxed{Z_1 + Z_2 = (-1 + i7)}$$

Para restar nros complejos se procede de manera similar

$$\left. \begin{array}{l} Z_1 = 4 - i6 \\ Z_2 = 3 + i2 \end{array} \right\} Z_1 - Z_2 = (4-3) + i(-6-2)$$
$$\boxed{Z_1 - Z_2 = 1 - i8}$$

$$Z_1 - Z_2 = (a-c) + i(b+d)$$

Multiplicación de N° Complejos en forma polar

$$\left. \begin{array}{l} Z_1 = 8 \mid 65^\circ \\ Z_2 = 3 \mid 20^\circ \end{array} \right\} Z_1 * Z_2 = (8 \times 3) \mid 65^\circ + 20^\circ$$
$$\boxed{Z_1 * Z_2 = 24 \mid 85^\circ}$$

$$\left. \begin{array}{l} Z_1 = m \mid \hat{\theta} \\ Z_2 = n \mid \hat{\alpha} \end{array} \right\} Z_1 * Z_2 = (m \times n) \mid \hat{\theta} + \hat{\alpha}$$

Para dividir nros complejos se procede de manera similar:

$$\left. \begin{array}{l} Z_1 = m \mid \hat{\theta} \\ Z_2 = n \mid \hat{\alpha} \end{array} \right\} \frac{Z_1}{Z_2} = \left(\frac{m}{n} \right) \mid \hat{\theta} - \hat{\alpha}$$

$$\left. \begin{array}{l} Z_1 = 6 \mid 120^\circ \\ Z_2 = 2 \mid 40^\circ \end{array} \right\} \frac{Z_1}{Z_2} = \left(\frac{6}{2} \right) \mid 120^\circ - 40^\circ$$
$$\boxed{\frac{Z_1}{Z_2} = 3 \mid 80^\circ}$$