

Ejercicio 1)

Establecer si la siguiente expresión es o no una identidad

$$\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{1 - \cos x} - \cot x = \operatorname{csc} x - \operatorname{sen} x$$

Cambiamos $\cot x$ y $\operatorname{csc} x$ por sus respectivas equivalencias:

$$\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{1 - \cos x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x$$

Realizamos suma de fraccionarios a ambos lados de la igualdad:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x \cos x - \cos x(1 - \cos x)}{(1 - \cos x) \operatorname{sen} x} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}$$

Efectuamos propiedad distributiva en: $-\cos x(1 - \cos x)$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x \cos x - \cos x + \cos^2 x}{(1 - \cos x) \operatorname{sen} x} = \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}$$

Analizando el numerador, se debe buscar un modo de eliminar la expresión $\operatorname{sen}^2 x$. Esta es una forma, pero pueden existir otras maneras de hacerlo.

Aquí agrupamos los dos primeros términos:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x \cos x - \cos x + \cos^2 x}{(1 - \cos x) \operatorname{sen} x} = \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}$$

Se factoriza!, pues existe un FACTOR COMÚN en la expresión del paréntesis arriba.

$$\frac{\cos x(\operatorname{sen}^2 x - 1) + \cos^2 x}{(1 - \cos x) \operatorname{sen} x} = \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Cambiamos la expresión : $\sin^2 x - 1$ por $-\cos^2 x$

$$\frac{\cos x(-\cos^2 x) + \cos^2 x}{(1 - \cos x)\sin x} = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

Multiplicamos los dos primeros términos $\cos x(-\cos^2 x)$

$$\frac{-\cos^3 x + \cos^2 x}{(1 - \cos x)\sin x} = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

Ordenamos o cambiamos el orden para ver las cosas mejor...

$$\frac{\cos^2 x - \cos^3 x}{(1 - \cos x)\sin x} = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

Nuevamente factorizamos el numerador de la izquierda

$$\frac{\cos^2 x(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)\sin x} = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

Y simplificando la expresión anterior, finalmente concluimos que

$$\frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

ES IDENTIDAD !!!